MATEMÁTICAS

FUNCIONES

LÍMITES, DERIVADAS E INTEGRALES

OBERON

Este libro te ayudará a acceder a la universidad

Los Profes de Ciencias

CONTENIDO

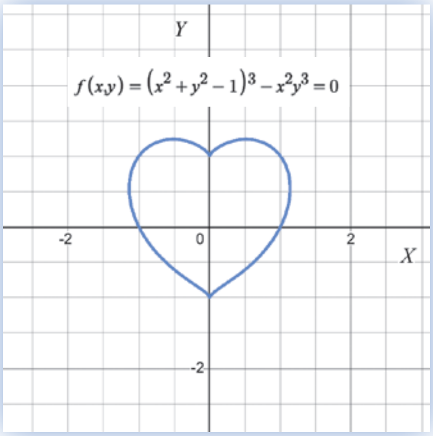
1 FUNCIONES

Antes de empezar este fascinante viaje en el que te convertirás en una persona experta en funciones matemáticas y sus aplicaciones, es necesario que empecemos por lo más sencillo.

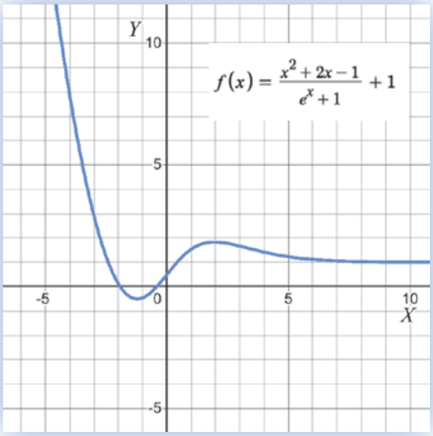
¿QUÉ ES UNA FUNCIÓN?

Para ello, imagina que estás delante de una máquina que dispensa *snacks* y bebidas. Siempre que presiones la misma tecla, obtendrás el mismo producto, ¿verdad?

Pues una función es lo mismo. Se trata de una relación entre un conjunto de entradas, que llamaremos dominio de la función, y un conjunto de salidas, que será la imagen de la función. En términos más sencillos, una función toma un valor como entrada y produce un valor correspondiente de salida. Cada entrada se relaciona con una única salida de acuerdo con las instrucciones definidas por la expresión algebraica que define la función, pudiendo elaborar lo que llamaremos tabla de valores de la función.



No es función



Es función

En el caso del corazón, hay valores de x que tienen 2 valores de y, por tanto, no es función. Solo puede haber un único valor de y para cada x, como se observa en la gráfica de la derecha.

El dominio de una función es algo que vas a hacer en todos tus ejercicios de funciones. Empecemos por el concepto.

¿QUÉ ES EL DOMINIO DE UNA FUNCIÓN?

Para ello recurrimos a un símil. Imagina que eres el director de un parque de atracciones y tienes una montaña rusa emocionante. Ahora, no todos pueden subir a esa montaña rusa, ¿verdad? Los niños pequeños no, ¡sería peligroso!

Entonces, aquí viene el truco: el "dominio" es como la lista de alturas permitidas para subir a la montaña rusa. Si alguien de la fila tiene una altura permitida, puede subir y disfrutar del paseo lleno de emociones, pero, si alguien no está en la lista, ¡mejor que se quede en tierra firme!

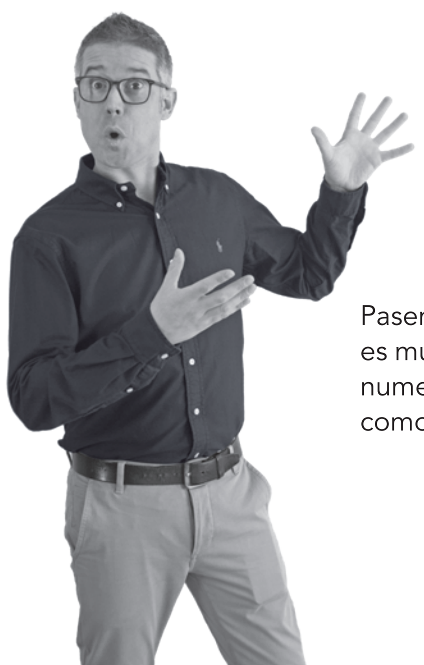
En términos matemáticos, el dominio de una función es igual. Es la lista de todos los números que pueden "subir" a la función para obtener respuestas sensatas y permitidas.

Es decir, son los valores que le podemos dar a la variable x para obtener un único valor de la variable y.

Ahora que ya sabemos lo que es el dominio, llega el momento de centrarnos en cómo calcularlo, ya que no todas las funciones tienen como dominio todos los números reales. Para dar la solución del dominio de una función es muy común hacer uso de intervalos. En caso de que necesites un repaso de cómo expresar intervalos escanea el código QR, te mandará a un vídeo con una explicación sobre el tema.

El primer tipo de funciones a la que vamos a calcular el **dominio** es a las **funciones polinómicas**. Se trata quizás de las funciones más sencillas y cuya ecuación general es:

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + d$$



El dominio de este tipo de funciones SIEMPRE es $\mathbb{R}$, es decir, podemos darle el valor que nos dé la gana, su dominio será siempre todos los números reales.

Ejemplo:

$$f(x) = 3x^3 + x^2 - 2$$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$

Pasemos ahora al dominio de **funciones racionales**. Identificar una función racional es muy sencillo, ya que se trata de una fracción en la que encontramos, tanto en el numerador como en el denominador, expresiones algebraicas con la variable x como protagonista. Su expresión general sería la siguiente:

$$f(x) = \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{cx^n + dx^{n-1} + \dots}$$

Cabe destacar que tanto en numerador como denominador podemos encontrar funciones irracionales, exponenciales, trigonométricas, etc. De momento, nos centraremos en el caso más sencillo, que sería tener polinomios tanto en el numerador como en el denominador. En cuanto tengamos los conocimientos del resto de funciones, iremos subiendo la dificultad de los ejercicios a realizar.

En cualquiera de los casos, en una función racional a la hora de calcular su dominio nos vamos a centrar en los valores de x que hacen que el denominador tome el valor 0, en caso de que los haya. Es decir, a la hora de calcular el dominio de una función racional, igualamos el denominador a 0 y resolvemos la ecuación.

Recordemos:

$$\frac{0}{k} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{k}{0} = \nexists$$

Sea k cualquier número distinto de 0.

De esta manera, aquellos valores que hagan el denominador 0 serán los que queden excluidos del dominio de la función. Veamos un ejemplo:

$$f(x) = \frac{4x^3 - 2x^2 + 4}{x^2 - 9}$$

Lo primero que hacemos es igualar el denominador a 0 y resolver:

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \begin{cases} -3 \\ 3 \end{cases}$$

De esta manera el dominio de $f(x) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

¿QUÉ SIGNIFICA?

Que le podemos dar a la función cualquier valor a excepción del -3 y el 3. Además, esta información es muy valiosa para el cálculo de asíntotas verticales que veremos más adelante.

Para profundizar sobre el dominio de este tipo de funciones tienes el código QR del *post-it* un vídeo con más ejemplos y casos especiales en los que el dominio de este tipo de funciones se corresponde con todos los números reales.

Dominar el cálculo del dominio de una función racional, independientemente del nivel de dificultad, es muy importante de cara a la prueba de acceso a la universidad. Es muy común que un apartado sea realizar el dominio de una función racional, como veremos más adelante con ejemplos reales de pruebas de acceso.

De cara a practicar te recomiendo que hagas los siguientes **ejercicios de repaso**:

1. Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 2} x^2 - 3 \qquad \lim_{x\to 3} \frac{2x}{x^2-9}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x}{x-1} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+1}$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{3x+1}{x^2+3} \qquad \lim_{x\to \infty} \frac{5x^2+3}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{-7x^3+2x}{x+5} \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3+3}{-2x}$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+4}{x-3} \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to \infty} \left(\frac{3x^2+1}{3x^2-2x}\right)^{2x-1} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x-1}$$

$$\lim_{x\to \infty} \sqrt{x+3}-\sqrt{2x-5} \qquad \lim_{x\to \infty} \log x + 4x^2$$

$$\lim_{x\to \infty} \sqrt{x^2+2x}-x \qquad \lim_{x\to \infty} \sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}$$

2. Determina, si existe, el valor de a de tal manera que:

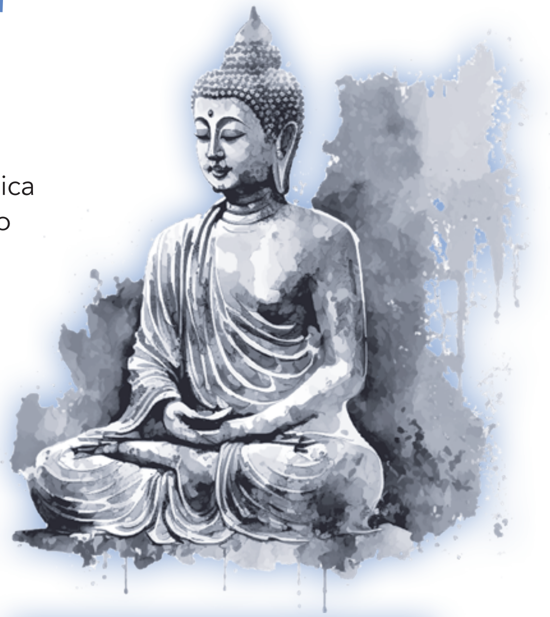
$$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{4x^2+ax}-(2x-3)\right) = 5$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3x^3+2x-1}{ax^4-3x^3+2}\right) = -1$$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{6x^2+x-3}{ax^2+7}\right) = -\frac{1}{3}$$

4 DERIVADAS

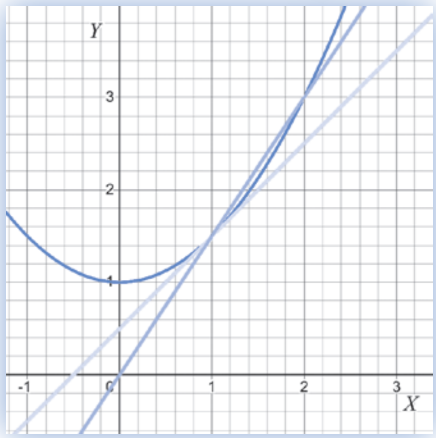
¿QUÉ ES UNA DERIVADA?



Me gustaría empezar este capítulo con una frase de Buddha: "La única constante en la vida es el cambio". Es precisamente eso, el cambio en las funciones, lo que estudia las derivadas. Para ello, descompondremos las funciones en partes muy pequeñas para que así se nos haga más sencillo analizar el cambio que se produce en cada momento. Sé que puede sonar un poco complicado, pero no os preocupéis, no es tan complejo como parece y os prometo que será una labor muy sencilla. Las derivadas son una herramienta muy útil en nuestra vida cotidiana y se utilizan en campos como la economía, la física, ingeniería o medicina, entre otras disciplinas. Todo aquello que sea vulnerable a tener cambios podrá ser estudiado mediante derivadas.

Para entender el concepto de derivada y el motivo por el que en la introducción os hablaba de descomponer la función en secciones pequeñas, tenemos que recurrir al concepto de **derivada usando la definición**. Este procedimiento se basa en estudiar el cambio que presenta la función a medida que vamos estrechando el rango de los valores de x que tomamos, obligando a que ese cambio tienda a ser cero. Para ello hacemos uso del límite de la función y calculamos el valor de la derivada mediante la siguiente expresión:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



TOMA AQUÍ TUS NOTAS

Una vez derivada, estudiamos los límites laterales de $f'(x)$ en $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^-} 2x+1 = 2\cdot 0+1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(0+1)^2} = \frac{1}{1} = 1$$

Puesto que los límites laterales de la función derivada son iguales en $x=0$ y la función es continua en dicho punto, podemos asegurar que la función es continua y derivable en $x=0$.

En caso de que los valores de los límites laterales en la función derivada no coincidan, podemos decir que la función es continua en dicho punto, pero no derivable. Por último, en caso de llegar a un ejemplo en el que la función no es continua, deberíamos decir que, al tratarse de una función que no es continua en dicho punto, no podría ser derivable por no cumplir el requisito de ser continua en el punto indicado.

De cara a hacer otro ejemplo del típico ejercicio que podemos encontrar en una prueba de acceso a la universidad en la que nos pidan comprobar la continuidad y derivabilidad de una función, tienes en el código QR un vídeo con otro ejemplo para que termines de comprender y dominar este tipo de ejercicios.

¿Recuerdas que en el apartado de continuidad podíamos hacer el estudio de la continuidad de una función cuando nos daban un parámetro? Pues nos pueden poner ejercicios en los que nos pidan estudiar la derivabilidad de una función en función de uno o dos parámetros. Se hace exactamente igual que la continuidad, pero con las derivadas de la función. Lo mejor es que veas el vídeo del código QR, ya que encontrarás un vídeo con una explicación.

TOMA AQUÍ TUS NOTAS

EJERCICIOS DE PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD RESUELTOS

- **Comunidad de Madrid 2022. Matemáticas aplicadas a las CC. SS. Convocatoria ordinaria:**

B2: Considere la función real de variable real:

$$f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-1}$$

b) Calcule $f'(x)$ y halle el valor de $f'(2)$.

- **Comunidad de Madrid 2022. Matemáticas aplicadas a las CC. SS. Convocatoria extraordinaria:**

B2. a) Determine los valores de los parámetros $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = ax + \frac{b}{x}$$

verifique que $f(2)=4$ y $f'(2)=0$.

- **Navarra 2023. Matemáticas II. Convocatoria ordinaria:**

P5. Calcula las derivadas de las siguientes funciones y sus valores en el punto $x=0$:

a) $f(x) = \ln\left[\cos(\pi x)\cdot e^{x^2+2x}\right]$

b) $g(x) = \arctan\sqrt{1+2x+e^{2x}}$

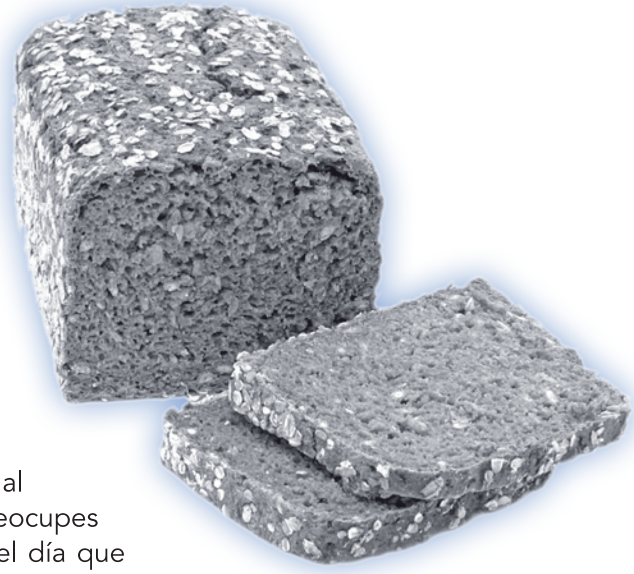
- **Comunidad de Madrid 2022. Matemáticas II. Convocatoria extraordinaria:**

Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x}, & si\ x<0 \\ x^2-4x+3, & si\ x\geq 0 \end{cases}$$

b) ¿Es $f(x)$ derivable en $x=0$? Justifique la respuesta.

7 INTEGRALES INDEFINIDAS



Es inevitable pensar en los productos integrales del supermercado cuando vemos por primera vez este título en el libro de matemáticas, ¿verdad? A día de hoy lo sigo pensando cuando lo explico en clase o en mis vídeos de YouTube.

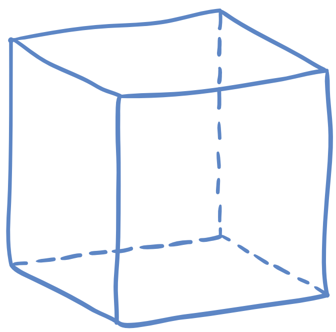
Deberíamos empezar por lo más sencillo: ¿qué es una integral? La respuesta es sencilla: "La operación inversa a las derivadas". Al igual que la división es la operación inversa a la multiplicación, la integral es la inversa a la derivada.

En el capítulo anterior, vimos que las derivadas tenían unas reglas y unos procedimientos específicos para cada función, pues en la integración va a ser lo mismo. Quizás al principio tengas dudas de si derivas o integras; no te preocupes por ello, nos ha pasado a todos. Hazme caso, llegará el día que incluso prefieras integrar a derivar. Por muy raro que pueda parecer al principio, en cuanto hagas un par de integrales, lo dominarás a la perfección.

La mejor manera de aprender a integrar es empezar desde lo más sencillo. A este tipo de integrales las llamaremos **integrales inmediatas**. Empezamos por integrar funciones polinómicas:

$$\int a\,dx = ax + c \quad \rightarrow \quad \int 4\,dx = 4x + c$$

De ahora en adelante, siempre que hagamos una integral indefinida, le añadiremos "$+c$" tras integrar. Se trata de una constante de la cual no sabemos el valor a no ser que nos den condiciones específicas. Piensa en derivar: al derivar un número sin incógnita, sea cual sea, su derivada será cero, por eso ponemos la letra "c". Estamos haciendo la operación inversa y, al no tener más información sobre la función integrada, no podremos calcular el valor de la letra "c". Más adelante, haremos un ejercicio específico de esto que te comento en el que calcularemos "c".



$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}\,dx \\[2em] \displaystyle\int f'(x)\cdot\left(1+tg^2 f(x)\right)\,dx\end{array}\right\} = tg\, f(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = arcsen\, x + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}\,dx = arcsen\, f(x) + c$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = arccos\, x + c$$

$$\int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}\,dx = arccos\, f(x) + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = arctg\, x + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}\,dx = arctg\, f(x) + c$$

Quizás te preguntes por la integral de la función tangente, ¿verdad? Al igual que las logarítmicas, las veremos un poco más adelante.

¿Qué te parece si hacemos ejemplos de integrales inmediatas? En el código QR tienes varios ejemplos de cada tipo. No dejes de verlo, ya que para pasar al siguiente nivel de dificultad es necesario dominar este tipo de integrales.

Hasta aquí las integrales inmediatas. Si te fijas, en este tipo de integrales no hemos visto cómo integrar funciones compuestas. Antes de llegar a ese momento, es necesario que aprendamos las **propiedades de la integral indefinida**. Son únicamente dos, pero muy importantes.

La primera de ellas es que la integral de la suma es igual a la suma de integrales. Cuando digo suma, me refiero también a la resta, se aplica a las dos:

$$\int f(x) \pm g(x) \pm \ldots dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx \pm \ldots$$

$$\int e^x + 2\,dx = \int e^x\,dx + \int 2\,dx = e^x + 2x + c$$

La segunda propiedad es quizás la más importante y se usa mucho a la hora de hacer integrales cuasi inmediatas:

$$\int a\, f(x)\,dx = a\cdot\int f(x)\,dx$$

Básicamente, lo que dice esta propiedad es que los números pueden entrar y salir de la integral libremente. Es más, nos da la posibilidad de poder colocar números dentro de la integral en caso de necesitarlos, siempre y cuando fuera de la integral pongamos su inverso. Vemos un ejemplo.

Queremos integrar:

$$\int e^{3x}\,dx$$

Para poder integrarlo necesitaríamos tener la derivada de la función compuesta, es decir, la derivada de "$3x$". Al tratarse de un número, puedo ponerlo dentro de la integral, siempre que fuera de la integral coloque su inverso:

$$\frac{1}{3}\int 3\cdot e^{3x}\,dx$$

Es como "no hacer nada", ya que por la segunda propiedad podemos sacar el 3 y se nos queda $\frac{3}{3} = 1$, pero, lejos de hacer nada, lo que permites es que podamos integrar la función:

$$\frac{1}{3}\int 3\cdot e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\,e^{3x} + c$$

Es por esto que os comentaba que considero que es la propiedad más importante, nos permite preparar las integrales para poder integrarlas.

¡MUCHAS GRACIAS!

Ha sido un placer ser tu profesor.

Estoy muy orgulloso de ti.

"Nos vemos en el siguiente vídeo".

Sube fotos y vídeos en las que salga el libro a tus redes
y no olvides etiquetarme para que las pueda ver y repostear.

Nos vemos en redes sociales.

¿Alguna vez sales con dudas de clase? ¿Tu profe explica muy deprisa, no lo entiendes y te gustaría poder rebobinarlo con un mando a distancia para volver a ver la explicación que hizo el día anterior? ¿Quieres aprobar con sobresaliente tus exámenes y acceder a la carrera universitaria que tanto te gusta?

¡ESTE LIBRO ES PARA TI!

El estudio de las funciones es algo que la experiencia me dice que se puede convertir en algo tedioso si no se hace con un cierto orden pero, **¿y si te digo que se puede aprender análisis de funciones fácilmente?**

Todo ello con explicaciones teóricas sencillas y ejercicios resueltos. **Te encontrarás CÓDIGOS QR a lo largo del libro que te dirigirán a VÍDEOS PRIVADOS con explicaciones teóricas y ejercicios resueltos.** Además, de cara a afrontar la prueba de acceso a la universidad, en cada capítulo hay una serie de ejercicios extraídos de pruebas de acceso de todas las comunidades autónomas de España, cada uno con un CÓDIGO QR para que aprendas a resolverlo. **¿Necesitas practicar más?** No te preocupes, **al final de cada capítulo, tendrás una serie de ejercicios para que sigas practicando y domines la materia.**

Te propongo un viaje educativo en el que trabajaremos los conceptos, siempre desde lo más sencillo hasta lo más complicado, con el fin de conseguir una buena base matemática que nos permitirá continuar con la siguiente lección. En este viaje encontraremos máquinas de *vending*, montañas rusas y tetrabricks que nos ayudarán a entender los conceptos matemáticos que se tratan con ejemplos cotidianos y aplicaciones matemáticas de los contenidos estudiados.

DÉJAME SER EL PROFESOR PARTICULAR QUE GUARDAS EN UN LIBRO AL QUE PUEDES VER Y REBOBINAR LAS VECES QUE QUIERAS.

OBERON
www.oberonlibros.com

ISBN 978-84-415-4990-6
2360536
9 788441 549906